

LGR — 1. semestrální test, 21. dubna 2022, 16:15 B

Jméno a příjmení:

1	2	3	Celkem

Úloha 1 (5 bodů) Rozhodněte, zda je daná formule logickým důsledkem dané množiny předpokladů. Pokud ano, sestrojte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte pravdivostní ohodnocení, které slouží jako protipříklad.

$$p \Rightarrow (q \vee r), s \Rightarrow (\neg q \vee t), r \Rightarrow \neg t \vdash p \Rightarrow \neg s$$

Úloha 2 (5 bodů) Dokažte platnost daného logického důsledku pomocí přirozené dedukce. Smíte použít zákon o vyloučení třetího (LEM), aniž byste ho odvozovali.

$$a \Rightarrow (b \wedge c), \neg a \Rightarrow (d \wedge c), (b \vee d) \Rightarrow (c \Rightarrow e) \vdash e$$

Úloha 3 (5 bodů) Jazyk predikátové logiky \mathcal{L} je zadaný následovně:

$$\begin{aligned} \text{Pred} &= \{Z\}, & ar(Z) &= 1 \\ \text{Func} &= \{a\}, & ar(a) &= 2 \\ \text{Kons} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Uvažujte interpretaci jazyka \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{Z}_5 & \llbracket a \rrbracket &: U \times U \rightarrow U \\ \llbracket Z \rrbracket &= \{0\} & & (u, v) \mapsto (u + v) \bmod 5 \end{aligned}$$

tedy přirozená čísla 0, 1, 2, 3, 4 se sčítáním pod modulem, a kontext proměnných

$$\begin{aligned} \rho &: \text{Var} \rightarrow U \\ &x \mapsto 2. \end{aligned}$$

Pro každou z následujících formulí rozhodněte, zda je v dané interpretaci a kontextu proměnných pravdivá, či nikoliv. Své rozhodnutí zdůvodněte.

$$\varphi := Z(x) \quad \psi := \exists x Z(x) \quad \chi := \exists z \forall y Z(a(y, z))$$