

LGR — 1. semestrální test, 21. dubna 2022, 14:30 A

Jméno a příjmení:

1	2	3	Celkem

Úloha 1 (5 bodů) Rozhodněte, zda je daná formule logickým důsledkem dané množiny předpokladů. Pokud ano, sestrojte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte pravdivostní ohodnocení, které slouží jako protipříklad.

$$(a_1 \vee a_2) \Rightarrow b, c \Rightarrow \neg b, d \Rightarrow \neg b, c \vee d \vdash \neg a_1$$

Úloha 2 (5 bodů) Dokažte platnost daného logického důsledku pomocí přirozené dedukce. Smíte použít zákon o vyloučení třetího (LEM), aniž byste ho odvozovali.

$$\neg p \Rightarrow q, (q \wedge r) \Rightarrow p \vdash (q \Rightarrow r) \Rightarrow p$$

Úloha 3 (5 bodů) Jazyk predikátové logiky \mathcal{L} je zadaný následovně:

$$\begin{aligned} \text{Pred} &= \{Z\}, & ar(Z) &= 1 \\ \text{Func} &= \{a\}, & ar(a) &= 2 \\ \text{Kons} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Uvažujte interpretaci jazyka \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{R}^2 & \llbracket a \rrbracket &: U \times U \rightarrow U \\ \llbracket Z \rrbracket &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} & (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

a kontext proměnných

$$\begin{aligned} \rho &: \text{Var} \rightarrow U \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pro každou z následujících formulí rozhodněte, zda je v dané interpretaci a kontextu proměnných pravdivá, či nikoliv. Své rozhodnutí zdůvodněte.

$$\varphi := Z(x) \quad \psi := \exists x Z(x) \quad \chi := \forall y \exists z Z(a(y, z))$$